Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert.

Par Frédéric Riesz à Szeged.

1. Soit donnée, dans l'espace complexe $\mathfrak{H}$ de Hilbert, une application A de l'espace sur lui-même, distributive, bornée et symmétrique au sens d'Hermite, c'est-à-dire telle que, avec les notations usuelles,

$$A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A f_1 + c_2 A f_2, \quad |Af| \leqq M_A |f|, \quad (Af, g) = (f, Ag).$$

On sait qu'une telle application A, dite brièvement *transformation hermitienne,* donne naissance à une classe étendue de transformations du même type que l'on appelle fonctions de A. Telles sont tout d'abord les puissances $A^2, A^3, \ldots$ de A et plus généralement les polynomes

$$P(A) = c_0 E + c_1 A + \ldots + c_n A^n,$$

où E désigne l'identité et que l'on fait correspondre aux polynomes

$$P(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n$$

à coefficients réels d'une variable t. Outre ces polynomes, il y a encore d'autres transformations correspondant à des fonctions $F(t)$ d'un type plus général et auxquelles on arrive au moyen d'un prolongement de la correspondance entre $P(t)$ et $P(A)$ que nous venons d'envisager. Ce prolongement a été fait par divers procédés, modelés plus ou moins sur les méthodes de la théorie de l'intégration[1]). La voie qui s'adapte le mieux au sujet de la note

---

[1]) Cf. F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913); Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *ces Acta,* 5 (1930), pp. 23—54; J. von Neumann, Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Math.,* (2) 32 (1931), pp. 191—226; M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space* (New York, 1932).

présente, c'est de fonder la définition des $F(A)$ sur la décomposition spectrale de la transformation A, décomposition qui remonte au mémoire classique de M. HILBERT de 1906. Rappelons que chaque transformation hermitienne A donne naissance à une famille de transformations hermitiennes E_λ, appelée aujourd'hui *décomposition de l'identité,* dépendant de la variable réelle λ et jouissant des propriétés suivantes: 1. $E_{\lambda_1}E_{\lambda_2}=E_{\lambda_2}E_{\lambda_1}=E_{\lambda_1}$, pour $\lambda_1\leqq\lambda_2$; 2. $E_{\lambda+0}=E_\lambda$ c'est-à-dire $E_{\lambda+\varepsilon}\to E_\lambda$ pour $\varepsilon>0$, $\varepsilon\to 0$[2]); 3. $E_\lambda=0$ pour $\lambda<m$ et $E_\lambda=E$ pour $\lambda\geqq M$ où m et M sont respectivement les deux bornes, inférieure et supérieure, de la forme hermitienne (Af,f), variée sous la condition $(f,f)=1$. Moyennant cette décomposition, la transformation A et ses puissances s'expriment par les formules

$$A^n=\int_{-\infty}^{+\infty}t^n dE_t$$

et par conséquent, on a aussi

$$P(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)dE_t, \tag{1}$$

où l'intégrale au second membre est une sorte d'intégrale de STIELTJES, formée d'une façon évidente, au lieu d'une fonction numérique, par rapport à la transformation variable E_t. D'ailleurs, l'équation (1) peut être remplacée par les équations équivalentes

$$(P(A)f,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)d(E_tf,f), \tag{2}$$

supposées remplies pour tout élément f de l'espace $\mathfrak{H}$ et dans lesquelles l'intégrale est formée par rapport à la fonction numérique monotone (E_tf,f). Cela étant, l'extension de la correspondance se fait en passant de l'intégrale de STIELTJES à celle que l'on connait sous le nom d'intégrale de STIELTJES—LEBESGUE. Soit $F(t)$ une fonction bornée intégrable en ce sens par rapport à toutes les fonctions (E_tf,f) considérées. Pour une telle fonction $F(t)$, l'intégrale

---

[2]) Au lieu de cette „continuité à droite", on pourrait aussi supposer celle à gauche, comme je l'ai fait à plusieurs reprises, sans que je puisse actuellement me rendre compte des raisons.

(3) $$F(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,dE_t$$ [3])

s'interprète aisément d'une manière analogue à celles formées par rapport à des fonctions monotones numériques; d'ailleurs, pour notre sujet actuel, il nous suffira d'observer que l'équation (3) et le système

(4) $$(F(A)f,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,d(E_tf,f)$$

sont éqivalents aussi dans ce cas général.

2. Dans ce qui suit nous allons essayer de *caractériser l'ensemble des transformations qui sont des fonctions, au sens indiqué, d'une transformation hermitienne donnée A.* Une condition *nécessaire et suffisante* a été établie par M. DE NEUMANN; elle consiste en ce que *la transformation B dont il s'agit soit permutable avec toutes les transformations hermitiennes permutables avec A*[4]). Dans la note présente, nous nous proposons d'établir cette condition d'une manière différente en nous faisant guider par l'idée qui ressort presque immédiatement des considérations suivantes. À coté des intégrales dans (3) et (4), qui sont des intégrales définies, on pourra considérer les intégrales indéfinies correspondantes, formées en remplaçant la limite d'intégration supérieure par la variable λ. Pour simplifier l'écriture, nous posons $F(A)=B$ et nous désignons par B_λ la transformation hermitienne définie par l'une ou l'autre des intégrales indéfinies que nous venons d'envisager, de sorte qu'on ait

$$(B_\lambda f,f)=\int_{-\infty}^{\lambda}F(t)\,d(E_tf,f).$$

On en conclut que le premier membre, considéré comme fonction

---

[3]) Quant à une définition directe de cette intégrale, *voir* notre mémoire [1]) pour le cas d'une fonction continue $F(t)$; le cas général vient d'être considéré par M. E. R. LORCH, Functions of Self-Adjoint Transformations in Hilbert Space, *ces Acta,* **7** (1935), pp. 136—146. Il convient d'observer que dans notre cas, en réalité, il ne s'agit que des intégrales formées sur l'intervalle fini (m, M).

[4]) On trouve cette condition, pas explicitement formulée, en combinant le théorème 6 du mémoire de M. DE NEUMANN cité plus haut [1]) avec le théorème 5 de son mémoire intitulé: Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Annalen,* **102** (1930), pp. 370—427.

de λ, admet une dérivée égale à $F(\lambda)$ et cela presque partout par rapport à la fonction monotone $(E_\lambda f, f)$. Or au lieu de limiter l'intégration à l'intervalle $(-\infty, \lambda)$, on peut aussi conserver la limite d'intégration $+\infty$ et en récompense, remplacer E_t par E_λ pour tous les $t > \lambda$ ou ce qui revient au même, remplacer E_t par le produit $E_\lambda E_t = E_t E_\lambda$. Il s'ensuit immédiatement que

$$B_\lambda = E_\lambda B = B E_\lambda.$$

En résumé, *la fonction* $F(\lambda)$ *est la dérivée, presque partout dans le sens que nous venons d'indiquer, des fonctions*

$$(B_\lambda f, f) = (E_\lambda B f, f) = (B E_\lambda f, f) = (B f, E_\lambda f)$$

par rapport aux fonctions monotones $(E_\lambda f, f)$.

Passons au problème inverse. Étant donnée une transformation hermitienne B, qu'il s'agisse de décider si B puisse être mise sous la forme $F(A)$ au moyen d'un choix convenable de la fonction $F(t)$. Alors l'idée qui se présente immédiatement, c'est de former la famille $B_\lambda = E_\lambda B$ et d'essayer de gagner $F(\lambda)$ en exécutant une sorte de différentiation de B_λ par rapport à E_λ. Or on essayera de faire cette différentiation par l'intermédiaire des formes $(B_\lambda f, f)$, en les dérivant par rapport à $(E_\lambda f, f)$; malheureusement, même en supposant que ces dérivées existent, rien ne nous assure, pour le moment, qu'elles ne dépendent pas du choix particulier de l'élément f. Donc le point essentiel du problème, c'est de *fixer les hypothèses sous lesquelles les dérivées en question coïncident,* dans un sens qu'il faudra encore préciser, *pour tous les éléments de l'espace* $\mathfrak{H}$.

C'est à ce point que se met à l'oeuvre l'hypothèse de M. de Neumann.

3. On voit immédiatement que l'hypothèse en question, supposant que la transformation hermitienne B soit permutable avec toutes les transformations hermitiennes C permutables avec A, est une condition nécessaire pour que B puisse être mise sous la forme $F(A)$. Cela vient du fait que les E_λ qui correspondent à A sont des limites de polynomes de A et qu'il en est de même de toutes les fonctions de A,

$$F(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dE_t$$

celles-ci ce composant des E_λ moyennant de combinaisons linéaires et de passages à la limite.

Il s'agira de voir que la condition est aussi suffisante. Supposons la condition remplie; en voici une première conséquence. Envisageons un élément quelconque f_0 et formons la plus petite variété linéaire fermée L comprenant f_0 et toutes ses images successives $A^n f_0$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui sont des transformés de f_0 par les divers polynomes de A ou des limites de tels éléments. De plus, désignons par la même lettre L la transformation qui vient en faisant correspondre à chaque élément f sa projection sur la variété L, c'est-à-dire l'élément Lf compris dans L et tel que

$$(Lf, f - Lf) = 0.$$

On sait qu'une telle „projection" correspondant à une variété linéaire (comme le sont aussi les E_λ) est une transformation hermitienne et que $L^2 = L$. Je dis que L est permutable avec A. En effet, il en est ainsi d'abord pour les éléments f de la variété L, puisque cette variété est invariante par rapport à A et que d'autre part la transformation L s'y réduit à l'identité. Considérons, en second lieu, la variété complémentaire CL de L, variété dont les éléments f sont caractérisés par l'équation $Lf = 0$ ou aussi par les équations

$$(f, f_0) = 0, \quad (f, A^n f_0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où f_0 est l'élément particulier par lequel nous avons défini la variété L. Donc on a aussi

$$(Af, f_0) = (f, Af_0) = 0, \quad (Af, A^n f_0) = (f, A^{n+1} f_0) = 0,$$

c'est-à-dire que, avec f, Af appartient aussi à la variété CL. Par conséquent on a, pour les éléments f de CL, d'une part $ALf = A(Lf) = 0$ et d'autre part, $LAf = L(Af) = 0$, c'est-à-dire que $AL = LA$ pour CL. Enfin, tout élément de l'espace $\mathfrak{H}$ étant la somme d'un élément de L et d'un autre de CL, la permutabilité de L avec A est démontrée. Donc, d'après l'hypothèse faite, L doit être permutable avec B et en particulier, on a $Bf_0 = BLf_0 = LBf_0$, c'est-à-dire que le transformé de f_0 par B appartient à la variété L. Autrement dit et comme f_0 était arbitraire, le transformé Bf est, pour chaque élément f, limite d'une suite d'éléments $P_n(A)f$, formés moyennant une suite de polynomes $P_n(t)$ convenablement choisis. Bien entendu, le choix de ces polynomes dépend de l'élément f.

Ce n'est pas aux transformations A et B que nous aurons à appliquer le résultat que nous venons d'établir, mais à des transformations $[A, A]$ et $[B, B]$ qui leur correspondent dans un certain espace *redoublé* que nous allons introduire.[5]) Pour cet effet, considérons l'espace $\mathfrak{H}\mathfrak{H}$ formé par les couples $[f, g]$, f et g parcourant indépendemment l'espace $\mathfrak{H}$ et les opérations fondamentates étant définies par les conventions

$$[f_1, g_1]+[f_2, g_2]=[f_1+f_2, g_1+g_2]; \; c[f, g]=[cf, cg];$$
$$([f_1, g_1], [f_2, g_2])=(f_1, f_2)+(g_1, g_2)$$

Avec ces conventions, $\mathfrak{H}\mathfrak{H}$ sera également un espace de HILBERT et l'on voit immédiatement que l'expression générale d'une transformation hermitienne H du nouvel espace est donnée par la formule

$$H[f, g]=[H_{11}f+H_{12}g, \; H_{21}f+H_{22}g]$$

où les H_{ik} sont des transformations hermitiennes de l'espace $\mathfrak{H}$. En effet, pour le voir, on n'a qu'à décomposer $[f, g]$ en

$$[f, g]=[f, 0]+[0, g],$$

puis à décomposer de la même manière les éléments $H[f, 0]$ et $H[0, g]$ et à comparer les termes obtenus. La même décomposition met aussi en évidence la condition pour que la transformation H soit permutable avec une transformation H' du même type; c'est que les transformations H_{ik} soient permutables avec tous les composants H'_{ik} de H'. En particulier, envisageons les transformations $[A, A]$ et $[B, B]$, c'est-à-dire celles qui font correspondre à $[f, g]$ respectivement les couples $[Af, Ag]$ et $[Bf, Bg]$. Alors il vient de ce que nous venons de voir que l'hypothèse de M. DE NEUMANN étant supposée d'être remplie pour A et B, elle le sera aussi pour $[A, A]$ et $[B, B]$. Il s'ensuit que pour chaque couple d'éléments f et g, il existe des suites de polynomes $P_n(t)$ de sorte que l'on ait à la fois

$$P_n(A)f \to Bf, \quad P_n(A)g \to Bg.$$

C'est de ce fait que nous déduirons l'unité de la dérivée de $B_\lambda = E_\lambda B$ *par rapport à* E_λ.

4. La transformation hermitienne B étant supposée d'être permutable avec toutes les transformations hermitiennes permutables avec A, elle l'est en particulier avec A de même qu'avec les poly-

[5]) Le même artifice fut employé par M. DE NEUMANN dans un ordre d'idées plus général; *cf.* le mémoire [4]), pp. 394—396.

nomes $P(A)$ et leurs limites, parmi lesquelles les transformations E_λ. En posant $B_\lambda = E_\lambda B = BE_\lambda$ et en rappelant encore que $E_\lambda = E_\lambda^2 = E_\lambda E_\mu$ pour $\mu > \lambda$ et que, par conséquent, $(E_\mu - E_\lambda)^2 = = E_\mu - E_\lambda$, il vient que, pour $\mu > \lambda$,

$$(5) \quad |(B_\mu f, f) - (B_\lambda f, f)| = |(B(E_\mu - E_\lambda)f, (E_\mu - E_\lambda)f)| \leqq \\ \leqq M_B((E_\mu - E_\lambda)f, (E_\mu - E_\lambda)f) = M_B[(E_\mu f, f) - (E_\lambda f, f)]$$

où M_B désigne la borne supérieure de $|Bg|$ sous la condition $|g| \leqq 1$. C'est-à-dire que le rapport

$$\frac{\beta(\mu) - \beta(\lambda)}{\alpha(\mu) - \alpha(\lambda)}$$

des accroissements des fonctions

$$\alpha(\lambda) = (E_\lambda f, f) = |E_\lambda f|^2, \quad \beta(\lambda) = (B_\lambda f, f)$$

est borné. Il s'ensuit que $\beta(\lambda)$ admet presque partout une dérivée par rapport à la fonction monotone $\alpha(\lambda)$.

Il y a lieu ici de préciser le sens de ce dernier énoncé. Sans nous perdre dans des généralités, rappelons que $E_{\lambda+\varepsilon} \to E_\lambda$ et $B_{\lambda+\varepsilon} = E_{\lambda+\varepsilon} B \to E_\lambda B = B_\lambda$ pour $0 < \varepsilon \to 0$ et que, par conséquent, les fonctions $\alpha(\lambda)$ et $\beta(\lambda)$ sont continues à droite, tandis qu'à gauche, $E_{\lambda-\varepsilon}$ tendant vers une transformation déterminée $E_{\lambda-0}$, elles admettent des limites bien déterminées. Alors considérons $\beta(\lambda) = \beta(\lambda(\alpha))$ comme fonction de $\alpha = \alpha(\lambda)$ le long de l'intervalle qui s'étend de $\alpha(-\infty) = 0$ à $\alpha(+\infty) = (f, f)$ et cela en convenant de faire correspondre, aux points de discontinuité de $\alpha(\lambda)$, les intervalles allant de $\alpha(\lambda - 0)$ à $\alpha(\lambda)$ et de poser $\beta(\lambda(\alpha))$, par définition, linéaire dans ces intervalles et égale respectivement à $\beta(\lambda - 0)$ et $\beta(\lambda)$ aux deux extrémités. Cela étant, on définit la dérivée de $\beta(\lambda)$ par rapport à $\alpha(\lambda)$ en un point λ en l'égalant à la dérivée de la fonction $\beta(\lambda(\alpha))$ par rapport à α, prise au point α qui correspond au point λ considéré. Pour les points de discontinuité de $\alpha(\lambda)$, nous convenons qu'on puisse prendre pour α un point arbitraire situé à l'intérieur de l'intervalle correspondant, ce qui revient à considérer comme dérivée le rapport fini

$$\frac{\beta(\lambda) - \beta(\lambda - 0)}{\alpha(\lambda) - \alpha(\lambda - 0)}.$$

Dire que la dérivée de $\beta(\lambda)$ par rapport à $\alpha(\lambda)$ existe presque partout (par rapport à $\alpha(\lambda)$ et pas à λ), cela voudra dire que l'image des points d'exception λ sur l'axe des α, s'il en existe, n'est qu'un ensemble de mesure nulle ou ce qui revient au même, que la dérivée de la fonction $\beta(\lambda(\alpha))$ existe presque partout (bien entendu par rapport à α).

Avec ces conventions, l'existence presque partout de la dérivée de $(B_\lambda f, f)$ par rapport à $(E_\lambda f, f)$ est assurée par l'inégalité (5), grâce au théorème classique de M. Lebesgue, affirmant la dérivabilité presque partout des fonctions à variation bornée.

Soit maintenant g un second élément de l'espace $\mathfrak{H}$ et posons

$$\gamma(\lambda) = (B_\lambda g, g), \quad \delta(\lambda) = (E_\lambda g, g);$$

nous aurons à comparer les dérivées de $\beta(\lambda)$ et $\gamma(\lambda)$, formées respectivement par rapport à $\alpha(\lambda)$ et à $\delta(\lambda)$. À cet effet, envisageons une suite de polynomes $P_n(t)$, de sorte que l'on ait à la fois

$$P_n(A)f \to Bf, \qquad P_n(A)g \to Bg,$$

comme nous en avons démontré l'existence au paragraphe précédent. En supprimant des termes si c'est nécessaire et en changeant le numérotage, on pourra aussi s'assurer de la convergence des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$$

où nous avons posé

$$f_n = Bf - P_n(A)f, \quad g_n = Bg - P_n(A)g.$$

Cela étant, évaluons la variation totale des fonctions

$$\varphi_n(\lambda) = \beta(\lambda) - (E_\lambda P_n(A)f, f) = (E_\lambda f_n, f).$$

Soient $\Delta_1 = (\lambda_1, \mu_1), \ldots, \Delta_l = (\lambda_l, \mu_l)$ des intervalles n'empiétant pas et désignons par les mêmes lettres les transformations $E_{\mu_1} - E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\mu_l} - E_{\lambda_l}$ qui y correspondent et par Δ_0 la différence $E - (\Delta_1 + \ldots + \Delta_l)$. Alors, eu égard encore aux équations $\Delta_i^2 = \Delta_i$ et $\Delta_i \Delta_k = 0$ pour $i \neq k$, on aura

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l} |\varphi_n(\mu_i) - \varphi_n(\lambda_i)| &= \sum_{i=1}^{l} |(\Delta_i^2 f_n, f)| = \\ &= \sum_{i=1}^{l} |(\Delta_i f_n, \Delta_i f)| \leq \sum_{i=0}^{l} |\Delta_i f_n|\, |\Delta_i f| \leq \\ &\leq \left[\sum_{i=0}^{l} (\Delta_i f_n, \Delta_i f_n)\right]^{1/2} \left[\sum_{i=0}^{l} (\Delta_i f, \Delta_i f)\right]^{1/2} \\ &= \left[\sum_{i,k=0}^{l} (\Delta_i f_n, \Delta_k f_n)\right]^{1/2} \left[\sum_{i,k=0}^{l} (\Delta_i f, \Delta_k f)\right]^{1/2} = |f_n|\, |f|.\end{aligned}$$

Par conséquent, la variation totale de la fonction $\varphi_n(\lambda)$ ne dépasse pas la quantité

$$|f_n|\,|f| = |(B - P_n(A))f|\,|f|$$

c'est-à-dire que, grâce à l'hypothèse faite, les variations totales des fonctions $\varphi_n(\lambda)$ forment une série convergénte. Comme la variation totale est indépendante du choix de la variable, il en sera de même pour les fonctions $\varphi_n(\lambda(\alpha))$, formées d'une manière analogue à $\beta(\lambda(\alpha))$ et il s'ensuit, par un théorème de M. FUBINI, la convergence presque partout de la série formée des dérivées de ces fonctions et à plus forte raison, la convergence vers zéro, presque partout, de ces dérivées elles-mêmes. C'est-à-dire que les dérivées de $(E_\lambda P_n(A)f, f)$, prises par rapport à $(E_\lambda f, f)$, convergent, presque partout par rapport à cette dernière fonction, vers celles de $(B_\lambda f, f)$. Or la dérivée de

$$(E_\lambda P_n(A)f, f) = (P_n(A)E_\lambda f, f)$$

est égale à $P_n(\lambda)$, ce qui vient d'une manière connue de l'équation (2); il s'ensuit que les polynomes $P_n(\lambda)$ convergent vers la dérivée de la fonction $\beta(\lambda) = (B_\lambda f, f)$ et cela presque partout par rapport à $(E_\lambda f, f)$. Par les mêmes raisons, ces polynomes convergent aussi vers la dérivée de $(B_\lambda g, g)$ par rapport à $(E_\lambda g, g)$ et cela presque partout par rapport à cette dernière.

En résumé, *ces deux dérivées, celle de $(B_\lambda f, f)$ par rapport à $(B_\lambda f, f)$ et celle de $(B_\lambda g, g)$ par rapport à $(B_\lambda g, g)$ existent et coïncident sauf peut-être pour des valeurs de λ appartenant à la réunion de deux ensembles, l'un des ces ensembles étant de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda f, f)$ et l'autre par rapport à $(E_\lambda g, g)$.*

C'est en profitant de cette coïncidence des dérivées que nous allons construire la fonction $F(\lambda)$ de sorte que l'on ait $F(A) = B$, c'est-à-dire que l'on ait

$$(Bf, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,d(E_t f, f),$$

et cela pour tous les f de l'espace $\mathfrak{H}$.

5. Dans les considérations du paragraphe précédent, f et g désignaient deux éléments arbitrairement choisis. Pour arriver à notre résultat final, il ne nous reste que de *fixer l'un des deux, soit g, une fois pour toutes et cela de sorte que „presque partout par rapport à $(E_\lambda g, g)$“ implique presque partout par rapport à* *toutes les* $(E_\lambda f, f)$, *quel que soit* f *dans l'espace* $\mathfrak{H}$. En effet, supposons que l'on ait réussi à choisir g de cette façon-là et désignons par $F(\lambda)$ la dérivée de $(B_\lambda g, g)$ par rapport à $(E_\lambda g, g)$, en convenant encore de poser $F(\lambda) = 0$ partout où la dérivée en question n'est pas déterminée, comme c'est la cas par exemple à l'extérieur de l'intervalle (m, M), m et M désignant, comme préalablement, les deux bornes des valeurs (Af, f) sous la condition $(f, f) = 1$. C'est seulement pour fixer les idées que nous venons de faire cette convention, les valeurs λ dont il s'agit formant un ensemble de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda g, g)$ et par conséquent, par rapport à toutes les $(E_\lambda f, f)$.

Maintenant, soit f un élément quelconque. D'après ce que nous venons de voir, la dérivée de $(B_\lambda f, f)$, par rapport à $(E_\lambda f, f)$, coïncide avec celle de $(B_\lambda g, g)$ par rapport à $(E_\lambda g, g)$, donc aussi avec $F(\lambda)$, sauf peut-être pour des valeurs de λ appartenant à l'un ou l'autre de deux ensembles, de mesure nulle par rapport respectivement à $(E_\lambda f, f)$ et $(E_\lambda g, g)$. En vue de l'hypothèse faite sur l'élément g, cela nous assure que la dérivée de $\beta(\lambda) = (B_\lambda f, f)$ par rapport à $\alpha(\lambda) = (E_\lambda f, f)$, posée, pour fixer les idées, égale à 0 là où elle n'est pas déterminée, coïncide avec $F(\lambda)$ presque partout par rapport à $\alpha(\lambda)$. Comme de plus la rapport des accroissements

$$\frac{\beta(\mu) - \beta(\lambda)}{\alpha(\mu) - \alpha(\lambda)}$$

est borné et que, par conséquent, il en est de même quant au rapport des accroissements de la fonction $\beta(\lambda(\alpha))$ et de α, on n'aura qu'à appliquer le théorème affirmant que de telles fonctions sont les intégrales de leurs dérivées et puis retourner à la variable λ, pour en conclure l'équation

$$B(f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, d(E_t f, f)$$

qu'il fallait démontrer.

Il nous reste encore de prouver l'existence d'éléments g du type exigé. À cet effet, envisageons une suite infinie d'éléments g_n, partout denses dans l'espace $\mathfrak{H}$. En partant avec l'élément g_1 (pour lequel nous écrirons aussi g') soit L_1 la plus petite variété linéaire fermée comprenant g_1 et ses images successives Ag_1, $A^2 g_1, \ldots$ De plus, soit g'' l'élément qui vient de g_2 en l'orthogonalisant par rapport à L_1, c'est-à-dire la différence de g_2 et de sa projection sur L_1 et soit L_2 la plus petite variété linéaire fermée comprenant g'' et ses images $Ag'', A^2g'', \dots$ En général, ayant défini les variétés $L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$, on définira L_n de la même manière en formant d'abord l'élément $g^{(n)}$ et cela en soustrayant de g_n ses projections sur les variétés déjà définies. Cela étant, choisissons une suite de constantes numériques $c_1, c_2, \dots$ différentes de zéro et telles que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n g^{(n)} \tag{6}$$

soit convergente et définisse de cette sorte un élément g, ce qui revient à supposer la convergence de la série numérique

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, |g^{(n)}|^2.$$

Je dis que l'élément g ainsi défini est du type exigé. Pour le voir, nous aurons d'abord à démontrer les faits suivants, d'ordre général:

a) lorsque l'ensemble e est de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda h, h)$ pour un élément h, il l'est aussi par rapport à $(E_\lambda Ch, Ch)$, C désignant une transformation hermitienne permutable avec A, d'ailleurs quelconque;

b) lorsque e est de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda h, h)$ et $(E_\lambda h', h')$ pour les éléments h, h', il l'est aussi par rapport à $(E_\lambda(h+h'), h+h')$;

c) lorsque e est de mesure nulle par rapport à toutes les $(E_\lambda h_n, h_n)$ correspondant aux éléments h_n d'une suite qui converge vers l'élément h, elle le sera aussi par rapport à $(E_\lambda h, h)$.

L'assertion a) est une conséquence immédiate de l'inégalité

$$(E_\mu Ch, Ch) - (E_\lambda Ch, Ch) = (\Delta Ch, Ch) = (C\Delta h, C\Delta h) \leqq$$
$$\leqq M_C^2 (\Delta h, \Delta h) = M_C^2 [(E_\mu h, h) - (E_\lambda h, h)]$$

pour $\lambda < \mu$ et où nous avons posé $\Delta = E_\mu - E_\lambda$ et désigné par M_C la borne supérieure de $|Cf|$ sous la condition $|f| \leqq 1$.

L'assertion b) est une conséquence immédiate de l'inégalité, écrite avec les mêmes notations,

$$(\Delta(h+h'), h+h') = (\Delta(h+h'), \Delta(h+h')) \leqq (\Delta(h+h'), \Delta(h+h')) +$$
$$+ (\Delta(h-h'), \Delta(h-h')) = 2(\Delta h, h) + 2(\Delta h', h').$$

Enfin, l'assertion c) vient en évaluant la variation totale des fonctions $\psi_n(\lambda) = (E_\lambda(h-h_n), h-h_n)$ tout comme nous l'avons fait au paragraphe précédent pour les fonctions $\varphi_n(\lambda)$; nous n'avons qu'à écrire $h-h_n$ au lieu de f et de f_n. Il s'ensuit que la variation totale de la fonction $\psi_n(\lambda)$ ne surpasse pas la quantité $|h-h_n|^2 \to 0$. Donc en choisissant n de sorte que $|h-h_n|^2 < \varepsilon/2$ et puis en renfermant l'ensemble e dans un système d'intervalles de façon que la somme des variations de $(E_\lambda h_n, h_n)$ sur ces intervalles soit aussi inférieure à $\varepsilon/2$, il vient immédiatement que la somme analogue, formée avec l'élément h, reste au delà de ε; c'est-à-dire que e est de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda h, h)$.

Cela étant, soit g l'élément défini par la série (6) et soit f un élément quelconque de l'espace $\mathfrak{H}$. Étant donné un ensemble e de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda g, g)$, il faut montrer qu'il l'est aussi par rapport à $(E_\lambda f, f)$. Nous passerons de g à f en plusieurs étapes. Tout d'abord nous passons aux éléments $g^{(n)}$; comme on a

$$g^{(n)} = \frac{1}{c_n} L_n g,$$

où L_n désigne l'opération de projection sur la variété L_n, transformation hermitienne et par sa définition, permutable avec A, l'ensemble e est de mesure nulle par rapport aux fonctions $(E_\lambda g^{(n)}, g^{(n)})$, grâce à l'assertion a). Par la même raison, il le sera par rapport à $(E_\lambda h, h)$ avec $h = P(A) g^{(n)}$ où $P(A)$ est un polynome et par l'assertion c), il le sera aussi pour les limites de tels éléments h, parmi lesquels tous les éléments appartenant à l'un quelconque des variétés L_n. Enfin, en posant $f_n = L_n f$, nous décomposons f en une série orthogonale

$$f = \sum_1^\infty f_n; \tag{7}$$

en effet, comme $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ est la projection de f sur la variété linéaire qui se compose de $L_1, L_2, \ldots, L_n$ et que cette variété comprend les éléments $g_1, g_2, \ldots, g_n$, on a

$$|f - (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)| \leqq |f - g_k| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

et cela, combiné avec l'hypothèse que les g_n sont partout denses dans l'espace $\mathfrak{H}$, donne l'équation (7). Or, les f_n appartenant respectivement aux variétés L_n, e est de mesure nulle par rapport aux fonctions $(E_\lambda f_n, f_n)$ et l'on n'aura qu'à appliquer successivement b) et c) pour en conclure qu'il en est de même pour l'élément f, ce qu'il fallait démontrer.

6. Le problème plus général où l'une ou l'autre des transformations A et B ou toutes les deux, toujours supposées linéaires et identiques à leurs adjointes, sont permises de ne pas être bornées, se ramène au problème ici traité par des artifices bien connus. Il en est de même pour l'autre extension où A est remplacée par tout un système, fini ou infini, de telles transformations, permutables entre elles.

(Reçu le 21 février 1935.)